

ОДИН ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Предлагается один подход к исследованию на устойчивость нулевого решения сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. Как и в большинстве работ, посвященных этой тематике, отправной точкой служит исследование соответствующей вырожденной системы. Найдены достаточные условия устойчивости нулевого решения при всех достаточно малых положительных значениях параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений, вырожденная система, устойчивость, устойчивость по части переменных.

Abstract. The authors suggest an approach to studying the stability of zero solution of singularly perturbed systems of differential equations. As it is in most studies on this topic, the starting point lies in investigating the corresponding degenerate system. The researchers have found sufficient conditions zero solution stability for all sufficiently small positive values.

Key words: singularly perturbed system of differential equations, degenerate system, stability, stable variables.

Введение

Как известно, теория устойчивости относительно фазовых переменных является обобщением теории обычной устойчивости по Ляпунову. Обзор накопленных сведений об устойчивости по части переменных содержится в работах [1–3]. Приведем необходимые здесь определения и теоремы из монографии [1].

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = X(t, x, y), \\ \dot{y} = Y(t, x, y), \end{cases} \quad (1)$$

в которой $t \geq 0$, $x = (x_1, \dots, x_k)^T$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T$, $X(t, 0, 0) = 0$, $Y(t, 0, 0) = 0$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения относительно фазовых координат вектора y .

Определение 1. Нулевое решение системы (1) называется устойчивым относительно координат фазового вектора y (y -устойчивым), если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется такое число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, что если

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0^T, y_0^T \end{pmatrix}^T \right\| < \delta, \text{ то } \|y(t, t_0, x_0, y_0)\| < \varepsilon \text{ при } t \geq t_0.$$

Определение 2. Нулевое решение системы (1) называется асимптотически y -устойчивым, если оно y -устойчиво, и для любого $t_0 \geq 0$ существует

такое $\Delta = \Delta(t_0) > 0$, что если $\left\| \begin{pmatrix} x_0^T, y_0^T \end{pmatrix}^T \right\| < \Delta$, то $\|y(t, t_0, x_0, y_0)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Для исследования устойчивости по части переменных мы будем применять описанный в той же работе [1] метод функций Ляпунова, которые должны удовлетворять определенным условиям.

Определение 3. Функция Ляпунова $V(t, x, y)$ называется y -определенно положительной, если существует такая определенно положительная функция $\omega(y)$, что $V(t, x, y) \geq \omega(y)$.

Теорема 1. Если для системы (1) можно найти y -определенно положительную функцию Ляпунова $V(t, x, y)$ такую, что $V(t, 0, 0) \equiv 0$ и ее полная производная на решениях системы (1) неположительна (y -определенно отрицательна), то нулевое решение системы (1) y -устойчиво (асимптотически).

1. Автономные системы

Рассмотрим автономную сингулярно возмущенную систему [4]

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \mu \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_k)^T$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T$, $\mu > 0$ – малый параметр; $f_1(0, 0) = 0$, $f_2(0, 0) = 0$.

Предполагается, что отображения $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ удовлетворяют достаточным условиям существования и единственности решения задачи Коши для системы (1) во всем пространстве R^{k+m} .

Сделав замену $t = \mu\tau$, перейдем к регулярно возмущенной системе относительно функций $\tilde{x}(\tau) = x(\mu\tau)$ и $\tilde{y}(\tau) = y(\mu\tau)$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \mu f_1(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ \dot{\tilde{y}} = f_2(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{cases} \quad (2)$$

Ей соответствует вырожденная система

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 0, \\ \dot{\tilde{y}} = f_2(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{cases} \quad (3)$$

Заметим сразу, что характер поведения решений систем (1) и (2) одинаков при $\mu > 0$. В частности, это касается устойчивости и ограниченности. Однако при $\mu = 0$ нужная связь между системами теряется. Регулярно возмущенная система более удобна для дальнейшего исследования, поскольку ее правая часть определена и непрерывно дифференцируема по параметру μ при всех его значениях.

Нашей первостепенной задачей является отыскание таких условий, при которых решения системы (2) в определенной мере наследуют свойства ре-

шений вырожденной системы (3). Нас будет интересовать устойчивость нулевого решения относительно произвольного набора координат. Для системы (1) обозначим этот набор через вектор z , а для системы (2) – через $\tilde{z}$. Для определенности будем считать, что $z = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)^T$, $\tilde{z} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_q)^T$, где $0 \leq p \leq k$, $0 \leq q \leq m$. Изначально предположим, что нулевое решение системы (3) $\tilde{z}$ -устойчиво (при этом оно в любом случае $\tilde{x}$ -устойчиво) и выполняются условия теоремы 1. Иными словами, существует $\tilde{z}$ -определенно положительная функция Ляпунова $V_0(\tilde{x}, \tilde{y})$ такая, что $W_0(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{dV_0}{d\tau} \Big|_{(3)} \leq 0$. К тому же по определению 3 найдется определительно положительная функция $\omega_0(\tilde{z})$, для которой будет справедливо неравенство

$$V_0(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \omega_0(\tilde{z}). \quad (4)$$

Если рассматривать систему (2) при конкретных значениях параметра $\mu \in (0; \mu_0]$, где $\mu_0 > 0$ есть некоторое достаточно малое число, то $\tilde{z}$ -устойчивость нулевого решения эквивалентна существованию $\tilde{z}$ -определенно положительной функции $V(\tilde{x}, \tilde{y})$, для которой справедливы требования теоремы 1. Определим условия, при которых существует «общая» функция Ляпунова $V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$, которая при каждом $\mu \in (0; \mu_0]$ будет удовлетворять требованиям теоремы 1. Более того, предположим, что эта функция непрерывно дифференцируема по переменной μ при $\mu \in [0; \mu_0]$. Тогда $V_0(\tilde{x}, \tilde{y})$ будет играть роль «начальной функции», т.е. функции $V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ при $\mu = 0$. Теперь остается задать «направление» изменения функции $V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ по параметру μ .

Введем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \mu} = F(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}), \\ \frac{\partial W}{\partial \mu} = \langle \nabla_{\tilde{x}} V, f_1 \rangle + \mu \langle \nabla_{\tilde{x}} F, f_1 \rangle + \langle \nabla_{\tilde{y}} F, f_2 \rangle \end{cases} \quad (5)$$

и начальные данные к ней

$$\begin{cases} V(0, \tilde{x}, \tilde{y}) = V_0(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ W(0, \tilde{x}, \tilde{y}) = W_0(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{cases}$$

Функция $F(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $F(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ непрерывно дифференцируема по всем переменным в пространстве R^{1+k+m} ;
2. $F(\mu, 0, 0) = 0$.

Именно она играет роль того «направления», о котором говорилось выше. Решения системы (5), определенные поставленными начальными данными, обозначим через $V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ и $W(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$.

Проинтегрируем первое уравнение системы (5):

$$V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) = V_0(\tilde{x}, \tilde{y}) + \int_0^\mu F(s, \tilde{x}, \tilde{y}) ds. \quad (6)$$

Тогда, правая часть второго уравнения системы (5), которую мы обозначим за $G(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$, примет вид

$$G(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) = \langle \nabla_{\tilde{x}} V_0, f_1 \rangle + \int_0^\mu \langle \nabla_{\tilde{x}} F(s, \tilde{x}, \tilde{y}), f_1 \rangle ds + \mu \langle \nabla_{\tilde{x}} F, f_1 \rangle + \langle \nabla_{\tilde{y}} F, f_2 \rangle.$$

Следующие утверждения показывают, какими должны быть функции $F(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ и $G(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$, чтобы функции $V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ и $W(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ обладали нужными нам свойствами.

Лемма 1. Пусть при $\mu \in [0; \mu_0]$, $\mu_0 > 0$, выполнены условия:

- 1) $F(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) \geq -\alpha(\mu)\omega_0(\tilde{z})$, где $\alpha(\mu)$ – непрерывная на $[0; \mu_0]$ функция;
- 2) $G(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$ ($\leq -\omega_1(\tilde{z})$), где $\omega_1(\tilde{z})$ – определено положительно функция).

Тогда существует $\mu_1 \in (0; \mu_0]$ такое, что при всех $\mu \in (0; \mu_1)$ функция $V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ будет $\tilde{z}$ -определенно положительной, а функция $W(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ будет принимать только неположительные значения (будет $\tilde{z}$ -определенно отрицательна).

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Воспользуемся равенством (6). Очевидно, что $V(\mu, 0, 0) = 0$. В силу первого условия леммы и неравенства (4) справедливо неравенство

$$V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) \geq \omega_0(\tilde{z}) - \omega_0(\tilde{z}) \int_0^\mu \alpha(s) ds = \omega_0(\tilde{z}) \left(1 - \int_0^\mu \alpha(s) ds \right).$$

Отсюда видно, что функция $V(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ будет $\tilde{z}$ -определенно положительна, если $1 - \int_0^\mu \alpha(s) ds > 0$, что справедливо при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Проинтегрируем второе уравнение системы (5). Получим

$$W(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) = W_0(\tilde{x}, \tilde{y}) + \int_0^\mu G(s, \tilde{x}, \tilde{y}) ds. \quad (7)$$

Пользуясь вторым условием леммы (1), получим

$$W(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) \leq W_0(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0 \quad (\leq -\mu\omega_1(\tilde{z})),$$

т.е. функция $W(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ принимает только неположительные значения ($\tilde{z}$ -определенно отрицательна).

Определим теперь величину μ_1 . Пусть уравнение $\int_0^\mu \alpha(s) ds = 1$ имеет

положительные корни. Обозначим через μ_2 минимальный из них. Тогда $\mu_1 = \min\{\mu_0; \mu_2\}$. Если же уравнение не имеет корней, то $\mu_1 = \mu_0$. Лемма доказана.

Из этой леммы следует теорема.

Теорема 2. Если при $\mu \in [0; \mu_0]$ для некоторой функции $F(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$, удовлетворяющей поставленным к ней требованиям, выполняются условия леммы 1, то нулевое решение системы (2) будет $\tilde{z}$ -устойчиво (асимптотически), а нулевое решение системы (1) z -устойчиво (асимптотически) при всех достаточно малых значениях параметра $\mu \in (0; \mu_1)$.

Практическое применение теоремы 2 сильно осложняется вторым условием леммы 1. Чтобы облегчить задачу поиска функции $F(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$, нужно рассмотреть различные варианты ее структуры. Рассмотрим один такой вариант. Пусть $F(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) = \varphi(\mu)F(\tilde{x}, \tilde{y})$, где $\varphi(\mu)$ – непрерывная на $[0; \mu_0]$ функция, $F(\tilde{x}, \tilde{y})$ непрерывно дифференцируема на всем R^{k+m} . Тогда функция $G(\mu, \tilde{x}, \tilde{y})$ из второго условия леммы 1 примет вид

$$G(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) = \langle \nabla_{\tilde{x}} V_0, f_1 \rangle + \left(\int_0^\mu \varphi(s) ds + \mu\varphi(\mu) \right) \langle \nabla_{\tilde{x}} F, f_1 \rangle + \varphi(\mu) \langle \nabla_{\tilde{y}} F, f_2 \rangle.$$

Функцию $\varphi(\mu)$ можно выбрать наиболее удобной для дальнейших оценок. Пусть, например, $\varphi(\mu) = a > 0$. Тогда получим

$$G(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) = \langle \nabla_{\tilde{x}} V_0, f_1 \rangle + 2a\mu \langle \nabla_{\tilde{x}} F, f_1 \rangle + a \langle \nabla_{\tilde{y}} F, f_2 \rangle.$$

Теперь, исходя из всего сказанного, сформулируем теорему.

Теорема 3. Если при $\mu \in [0; \mu_0]$ для некоторой функции $F(\tilde{x}, \tilde{y})$, удовлетворяющей поставленным к ней требованиям, существует число $a > 0$, при котором выполняются условия:

$$1) \quad F(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \alpha_0 \omega_0(\tilde{z}), \text{ где } \alpha_0 \in R;$$

2) $G(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0 \quad (\leq -\omega_1(\tilde{z}))$, где $\omega_1(\tilde{z})$ – определено положительно функция), то нулевое решение системы (2) будет $\tilde{z}$ -устойчиво (асимптотически), а нулевое решение системы (1) z -устойчиво (асимптотически) при всех достаточно малых значениях параметра $\mu \in (0; \mu_1)$. При этом

$$\mu_1 = \begin{cases} \min\{\mu_0, 1/(\alpha_0 a)\}, & \alpha_0 > 0; \\ \mu_0, & \alpha_0 \leq 0. \end{cases}$$

Задачу об устойчивости по всем переменным можно рассматривать как частный случай задачи относительно части переменных. В этом случае все проведенные рассуждения остаются справедливыми с учетом лишь того, что

$$\tilde{z} = (\tilde{x}^T, \tilde{y}^T)^T.$$

Пример. Дана сингулярно возмущенная система третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e^y(-x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_2 e^y, \\ \mu \dot{y} = -y e^{-(x_1 + x_2)^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Как видно, она имеет одно положение равновесия $x_1 = x_2 = y = 0$. Будем исследовать его на устойчивость относительно всех фазовых координат, т.е. $z = (x_1, x_2, y)^T$. Соответствующая регулярно возмущенная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \mu e^{\tilde{y}}(-\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2), \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\mu \tilde{x}_2 e^{\tilde{y}}, \\ \dot{\tilde{y}} = -\tilde{y} e^{-(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)^2}, \end{cases} \quad (9)$$

а она вырождается в систему

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = 0, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = 0, \\ \dot{\tilde{y}} = -\tilde{y} e^{-(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)^2}. \end{cases} \quad (10)$$

Нулевое решение системы (10) устойчиво, т.к. для функции Ляпунова $V_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}) = (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{y}^2$ выполняется соотношение $\left. \frac{dV_0}{d\tau} \right|_{(10)} \leq 0$.

Рассмотрим функцию $F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}) = \tilde{y}^2$. Она в любом случае удовлетворяет первому условию теоремы 3 при $\alpha_0 < 0$. Второе условие этой теоремы будет также выполнено, т.к. при $a = 1$ для всех значений μ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} G(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}) &= 2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)e^{\tilde{y}}(-\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) - \\ &- (-2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + 2\tilde{x}_2)\tilde{x}_2 e^{\tilde{y}} - 2\tilde{y}^2 e^{-(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно теореме 3 с учетом, что $\alpha_0 < 0$, нулевое решение систем (9) и (8) должно быть устойчивым при всех значениях параметра $\mu > 0$.

Правильность этого вывода можно проверить традиционным способом, т.е. используя функцию Ляпунова $V(\mu, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y})$, удовлетворяющую требованиям теоремы об устойчивости при всех значениях $\mu > 0$. В этом нам может помочь все та же теорема 3. Подставим в равенство (6) найденные $F(\mu, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y})$ и $V_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y})$ и получим определенно положительную функцию $V(\mu, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}) = (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)^2 + \tilde{x}_2^2 + (1 + \mu)\tilde{y}^2$. При этом

$$\left. \frac{dV}{d\tau} \right|_{(9)} \leq 0.$$

Тогда по теореме об устойчивости нулевое решение системы (9), а значит и системы (8), устойчиво при всех $\mu > 0$.

2. Неавтономные системы

Для неавтономных систем можно провести те же самые рассуждения. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y), \\ \mu \dot{y} = f_2(t, x, y), \end{cases} \quad (11)$$

где $x = (x_1, \dots, x_k)^T$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T$; $\mu > 0$ – малый параметр; $f_1(t, x, y)$, $f_2(t, x, y)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и в разд. 1. Соответствующая регулярно возмущенная система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \mu f_1(\mu\tau, \tilde{x}, \tilde{y}), \\ \dot{\tilde{y}} = f_2(\mu\tau, \tilde{x}, \tilde{y}). \end{cases} \quad (12)$$

При $\mu = 0$ система (12) становится автономной:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 0, \\ \dot{\tilde{y}} = f_2(0, \tilde{x}, \tilde{y}), \end{cases} \quad (13)$$

а ее нулевое решение по-прежнему предполагается $\tilde{z}$ -устойчивым. Это означает, что существует $\tilde{z}$ -определенно положительная функция $V_0(\tilde{x}, \tilde{y})$ такая,

что $W_0(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left. \frac{dV_0}{d\tau} \right|_{(13)} \leq 0$. При этом $V_0(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \omega_0(\tilde{z})$, где $\omega_0(\tilde{z})$ – некоторая

определенно положительная функция.

В дальнейшем не будем выписывать все выкладки, поскольку они повторяют выкладки из разд. 1 с той лишь разницей, что в данном случае нужно учитывать зависимость всех функций от переменной τ . Заметим лишь, что для неавтономных систем функция G , которую нужно в дальнейшем оценивать, будет иметь следующую структуру:

$$G(\mu, \tau, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial F}{\partial \tau} + \mu \langle \nabla_{\tilde{x}} F, f_1 \rangle + \mu \tau \left\langle \nabla_{\tilde{x}} V_0, \frac{\partial f_1}{\partial t} \right\rangle + \\ + \mu \tau \left\langle \nabla_{\tilde{x}} \int_0^\mu F(s) ds, \frac{\partial f_1}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla_{\tilde{x}} V_0, f_1 \rangle + \left\langle \nabla_{\tilde{x}} \int_0^\mu F(s) ds, f_1 \right\rangle + \\ + \langle \nabla_{\tilde{y}} F, f_2 \rangle + \tau \left\langle \nabla_{\tilde{y}} V_0, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right\rangle + \tau \left\langle \nabla_{\tilde{y}} \int_0^\mu F(s) ds, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right\rangle.$$

Теорема 4. Если для некоторой функции $F(\mu, \tau, \tilde{x}, \tilde{y})$, удовлетворяющей требованиям из разд. 1, при $\mu \in [0; \mu_0]$ и $\tau \geq 0$ выполняются условия:

- 1) $F(\mu, \tau, \tilde{x}, \tilde{y}) \geq -\alpha(\mu) \omega_0(\tilde{z})$, где $\alpha(\mu)$ – непрерывная $[0; \mu_0]$ функция,
- 2) $G(\mu, \tau, \tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$,

то нулевое решение системы (12) будет $\tilde{z}$ -устойчиво, а нулевое решение системы (11) z -устойчиво при всех достаточно малых значениях параметра $\mu > 0$.

Список литературы

1. Румянцев, В. В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. – М. : Наука, 1987. – 253 с.
2. Воротников, В. И. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, метода и приложения / В. И. Воротников, В. В. Румянцев. – М. : Научный мир, 2001. – 320 с.
3. Воротников, В. И. Частичная устойчивость и управление: состояние, проблемы и перспективы развития / В. И. Воротников // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 4. – С. 3–32.
4. Тихонов, А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1950. – Т. 27, № 1. – С. 147–157.

Козлов Михаил Владимирович
магистрант, Мордовский
государственный университет
имени Н. П. Огарева (г. Саранск)

E-mail: mhl1988@yandex.ru

Kozlov Mikhail Vladimirovich
Undergraduate student, Mordovia State
University named after N. P. Ogaryov
(Saransk)

Щенников Владимир Николаевич
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
дифференциальных уравнений,
Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева
(г. Саранск)

E-mail: mhl1988@yandex.ru

Shchennikov Vladimir Nikolayevich
Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of differential equations, Mordovia State
University named after N. P. Ogaryov
(Saransk)

УДК 517.928.4

Козлов, М. В.

Один подход к исследованию устойчивости решений сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений / М. В. Козлов, В. Н. Щенников // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 49–57.